Michał Budnik – Sprawozdanie 1

# Wstęp

Druga lista przedstawia zadania które mają za zadanie pokazać jak drobne różnice obliczeń wpływają na wyniki działań.

# Zadania

## Zadanie 1

### 1.1 Opis zagadnienia

Zadanie polega na zbadaniu wpływu minimalnej zmiany danych wejściowych dla zadania piątego z listy pierwszej.

### 1.2 Rozwiązanie

Zastosowane zostało rozwiązanie dla zadania piątego z listy pierwszej

### 1.3 Wyniki

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Algorytm | Dane oryginalne | | Dane zmodyfikowane | |
| Float32 | Float64 | Float32 | Float64 |
| Algorytm 1 | -0.4999443 | 1.0251881368296672e-10 | -0.4999443 | -0.004296342739891585 |
| Algorytm 2 | -0.4543457 | -1.5643308870494366e-10 | -0.4543457 | -0.004296342998713953 |
| Algorytm 3 | -0.5 | 0.0 | -0.5 | -0.004296342842280865 |
| Algorytm 4 | -0.5 | 0.0 | -0.5 | -0.004296342842280865 |

### 1.4 Wnioski

Zauważyć można, że pomimo zmiany danych wejściowych wyniki działań dla arytmetyki Float32 pozostały bez zmian. Z powodu możliwej reprezentacji liczb w standardzie Float32 liczby x4 oraz x4’ są sobie równe, a liczby x5 oraz x5’ różnią się na najmniej znaczącym bicie. Można z tego wywnioskować, że arytmetyka ta ma zbyt małą precyzję aby zmienić wynik algorytmów dla danej zmiany danych.

Dla standardu Float64 można zauważyć znaczną zmianę wyników. Wyniki algorytmów w dalszym ciągu różnią się od wyniku faktycznego, jednakże łatwo zauważyć większą precyzję arytmetyki Float64.

## Zadanie 2

### 2.1 Opis zagadnienia

W zadaniu należy narysować wykres funkcji w co najmniej dwóch programach graficznych, oraz porównać otrzymane wyniki do faktycznej granicy funkcji

### 2.2 Rozwiązanie

Obliczona wartość granicy to: 1.  
Wykresy narysowane za pomącą stron:  
fooplot.com  
desmos.com

### 2.3 Wyniki

### 

### 2.4 Wnioski

Na wykresach można zauważyć, że dla małych, dodatnich x wykres funkcji zbiega do wartości 1. Dla x z przedziału [30, 37] funkcja zaczyna oscylować, a następnie spada ona do zera. Dzieje się tak dlatego, że dla dużych wartości x redukuje się możliwa ilość cyfr znaczących, co w ostateczności prawdopodobnie powoduje przyjęcie wartości jako 1. Skutkuje to wyrażeniem Wniosek jest prosty, nie zawsze należy ufać maszynie, ponieważ posiada ona swoje ograniczenia.

## Zadanie 3

### 3.1 Opis zagadnienia

Zadanie polega na rozwiązaniu układu równań liniowych Ax = b, gdzie macierz A jest macierzą Hilberta (zadanie a) lub macierzą losową o zadanym współczynniku uwarunkowania. Układy mają być rozwiązane za pomocą eliminacji Gaussa oraz mnożenia inwersji (

### 3.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie polega na:  
1) Wygenerowaniu macierzy (odpowiednio Hilberta lub losowej) poprzez podane przez prowadzącego kurs funkcje (hilb(n) oraz matcond(n, c)), przy czym dla macierzy wygenerowanej funkcją marcond należy sprawdzić, czy nie jest osobliwa,  
2) zainicjowaniu macierzy oraz   
3) rozwiązaniu układów równań odpowiednimi metodami.

### 3.3 Wyniki

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | rank(A) | cond(A) | gaussError | inverseError |
| 1 | 1 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 2 | 19.28147006790397 | 5.661048867003676e-16 | 1.4043333874306803e-15 |
| 3 | 3 | 524.0567775860644 | 8.022593772267726e-15 | 0.0 |
| 4 | 4 | 15513.73873892924 | 4.137409622430382e-14 | 0.0 |
| 5 | 5 | 476607.25024259434 | 1.6828426299227195e-12 | 3.3544360584359632e-12 |
| 6 | 6 | 1.4951058642254665e7 | 2.618913302311624e-10 | 2.0163759404347654e-10 |
| 7 | 7 | 4.75367356583129e8 | 1.2606867224171548e-8 | 4.713280397232037e-9 |
| 8 | 8 | 1.5257575538060041e10 | 6.124089555723088e-8 | 3.07748390309622e-7 |
| 9 | 9 | 4.931537564468762e11 | 3.8751634185032475e-6 | 4.541268303176643e-6 |
| 10 | 10 | 1.6024416992541715e13 | 8.67039023709691e-5 | 0.0002501493411824886 |
| 11 | 11 | 5.222677939280335e14 | 0.00015827808158590435 | 0.007618304284315809 |
| 12 | 11 | 1.7514731907091464e16 | 0.13396208372085344 | 0.258994120804705 |
| 13 | 11 | 3.344143497338461e18 | 0.11039701117868264 | 5.331275639426837 |
| 14 | 12 | 6.200786263161444e17 | 1.4554087127659643 | 8.71499275104814 |
| 15 | 12 | 3.674392953467974e17 | 4.696668350857427 | 7.344641453111494 |
| 16 | 12 | 7.865467778431645e17 | 54.15518954564602 | 29.84884207073541 |
| 17 | 12 | 1.263684342666052e18 | 13.707236683836307 | 10.516942378369349 |
| 18 | 12 | 2.2446309929189128e18 | 9.134134521198485 | 7.575475905055309 |
| 19 | 13 | 6.471953976541591e18 | 9.720589712655698 | 12.233761393757726 |
| 20 | 13 | 1.3553657908688225e18 | 7.549915039472976 | 22.062697257870493 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | rank(A) | cond(A) | gaussError | inverseError |
| 5 | 5 | 1.0000000000000007 | 9.930136612989092e-17 | 1.719950113979703e-16 |
| 5 | 5 | 9.999999999999988 | 2.482534153247273e-16 | 6.080941944488118e-16 |
| 5 | 5 | 1000.0000000000356 | 1.4541124608611843e-14 | 2.113790000726612e-14 |
| 5 | 5 | 9.999999999232784e6 | 2.733750609118543e-10 | 2.773166087587084e-10 |
| 5 | 5 | 9.999722942273794e11 | 3.368736654940589e-5 | 3.5662829261841566e-5 |
| 5 | 4 | 5.763366163909322e15 | 0.5192329946843047 | 0.5116322684555774 |
| 10 | 10 | 1.0000000000000009 | 2.7866376757248753e-16 | 3.040470972244059e-16 |
| 10 | 10 | 10.000000000000004 | 2.0471501066083614e-16 | 3.3121136700345433e-16 |
| 10 | 10 | 999.9999999999661 | 3.297777288870493e-14 | 3.6085630051979476e-14 |
| 10 | 10 | 9.99999999331397e6 | 5.402573313897469e-11 | 7.362751430292566e-11 |
| 10 | 10 | 9.999589670093572e11 | 2.526857507946895e-5 | 2.0562272097912138e-5 |
| 10 | 9 | 8.993309423001874e15 | 0.06565039475013357 | 0.13671316952896764 |
| 20 | 20 | 1.000000000000001 | 5.666489568756302e-16 | 4.349751231238426e-16 |
| 20 | 20 | 10.000000000000002 | 5.242792401601901e-16 | 3.979805003092567e-16 |
| 20 | 20 | 999.9999999999714 | 2.5068186864431267e-14 | 2.7552863592364415e-14 |
| 20 | 20 | 9.999999999699764e6 | 2.40142842178177e-10 | 2.7521976910864487e-10 |
| 20 | 20 | 1.0001070004669215e12 | 7.815459356116056e-6 | 1.1479303707243097e-5 |
| 20 | 19 | 1.3019159228193968e16 | 0.21554446069901784 | 0.2382740457415021 |

### 3.4 Wnioski

Macierz Hilberta jest macierzą bardzo źle uwarunkowaną. Jak można zauważyć w tabeli wskaźnik uwarunkowania rośnie bardzo szybko, przez co nawet dla stosunkowo małych n wynik staje się niepoprawny.

Dzięki zadaniu dla macierzy losowej o zadanym współczynniku uwarunkowania można łatwo zauważyć i zanalizować jak ten współczynnik wpływa na błąd względny wyniku dla obu metod.

Wnioski nasuwają się same, gdy w ramach jakiegoś problemu mamy do czynienia z macierzą Hilberta, bądź inną źle uwarunkowaną macierzą, należy liczyć się ze sporym błędem obliczeniowym nawet dla małych macierzy.

## Zadanie 4

### 4.1 Opis zagadnienia

Zadanie a) polega na sprawdzeniu rozbieżności dla wartości pierwiastków wielomianu Wilkinsona obliczonych trzema różnymi sposobami: gdzie P(x) to wielomian Wilkinsona w postaci naturalnej, p(x) to wielomian w postaci iloczynowej, zk to pierwiastki wielomianu P(x), a k należy do przedziału [1, 20].

### 4.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie opera się o wykorzystanie biblioteki “Polyniomials” w języku Julia. Współczynniki są deklarowane w tablicach, z których poprzez funkcję Poly (bądź poly dla wielomianu p(x)) tworzone są wielomiany. Następnie wyliczane są pierwiastki wielomianu P(x) poprze funkcję roots, a wartość wielomianu dla odpowiednich pierwiastków poprzez funkcję polyval.

### 4.3 Wyniki

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 36352.0 | 38400.0 | 3.0109248427834245e-13 |
| 181760.0 | 198144.0 | 2.8318236644508943e-11 |
| 209408.0 | 301568.0 | 4.0790348876384996e-10 |
| 3.106816e6 | 2.844672e6 | 1.626246826091915e-8 |
| 2.4114688e7 | 2.3346688e7 | 6.657697912970661e-7 |
| 1.20152064e8 | 1.1882496e8 | 1.0754175226779239e-5 |
| 4.80398336e8 | 4.78290944e8 | 0.00010200279300764947 |
| 1.682691072e9 | 1.67849728e9 | 0.0006441703922384079 |
| 4.465326592e9 | 4.457859584e9 | 0.002915294362052734 |
| 1.2707126784e10 | 1.2696907264e10 | 0.009586957518274986 |
| 3.5759895552e10 | 3.5743469056e10 | 0.025022932909317674 |
| 7.216771584e10 | 7.2146650624e10 | 0.04671674615314281 |
| 2.15723629056e11 | 2.15696330752e11 | 0.07431403244734014 |
| 3.65383250944e11 | 3.653447936e11 | 0.08524440819787316 |
| 6.13987753472e11 | 6.13938415616e11 | 0.07549379969947623 |
| 1.555027751936e12 | 1.554961097216e12 | 0.05371328339202819 |
| 3.777623778304e12 | 3.777532946944e12 | 0.025427146237412046 |
| 7.199554861056e12 | 7.1994474752e12 | 0.009078647283519814 |
| 1.0278376162816e13 | 1.0278235656704e13 | 0.0019098182994383706 |
| 2.7462952745472e13 | 2.7462788907008e13 | 0.00019070876336257925 |

Zmienione współczynniki:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 36352.0 | 38400.0 | 3.0109248427834245e-13 |
| 181760.0 | 198144.0 | 2.8318236644508943e-11 |
| 209408.0 | 301568.0 | 4.0790348876384996e-10 |
| 3.106816e6 | 2.844672e6 | 1.626246826091915e-8 |
| 2.4114688e7 | 2.3346688e7 | 6.657697912970661e-7 |
| 1.20152064e8 | 1.1882496e8 | 1.0754175226779239e-5 |
| 4.80398336e8 | 4.78290944e8 | 0.00010200279300764947 |
| 1.682691072e9 | 1.67849728e9 | 0.0006441703922384079 |
| 4.465326592e9 | 4.457859584e9 | 0.002915294362052734 |
| 1.2707126784e10 | 1.2696907264e10 | 0.009586957518274986 |
| 3.5759895552e10 | 3.5743469056e10 | 0.025022932909317674 |
| 7.216771584e10 | 7.2146650624e10 | 0.04671674615314281 |
| 2.15723629056e11 | 2.15696330752e11 | 0.07431403244734014 |
| 3.65383250944e11 | 3.653447936e11 | 0.08524440819787316 |
| 6.13987753472e11 | 6.13938415616e11 | 0.07549379969947623 |
| 1.555027751936e12 | 1.554961097216e12 | 0.05371328339202819 |
| 3.777623778304e12 | 3.777532946944e12 | 0.025427146237412046 |
| 7.199554861056e12 | 7.1994474752e12 | 0.009078647283519814 |
| 1.0278376162816e13 | 1.0278235656704e13 | 0.0019098182994383706 |
| 2.7462952745472e13 | 2.7462788907008e13 | 0.00019070876336257925 |

### 4.4 Wnioski

Można zauważyć, że wartości wielomianów w postaciach naturanej oraz iloczynowej różnią się dla pewnych pierwiastków wielomianu. Oczekiwanymi wartościami wielomianów jest zero, jednakże jak można zauważyć wyniki znacząco różnią się od zera. Dzieje sie tak, ponieważ wielomian Wilkinsona jest źle uwarunkowany na zaburzenia współczynników. Nawet nieznaczne zaburzenia bardzo znacząco wpływają na wynik końcowy – jak widać nawet o rząd 1013.

## Zadanie 5

### 5.1 Opis zagadnienia

Zadanie polega na wykonaniu 40 iteracji wyrażenia dla p0 = 0.01 oraz r = 3. Zadanie należy wykonać na trzy sposoby:  
1) W arytmetyce Float32,  
2) w arytmetyce Float32 z obięciem wyniku w 10 iteracji do trzech miejsc po przecinku,  
3) w arytmetyce Float64.

### 5.2 Rozwiązanie

Zaimplementowany został algorytm rekurencyjny podany w zadaniu, oraz dodatkowy algorytm rekurencyjny który po odpowiedniej iteracji obcina wynik do trzech miejsc po przecinku. Dodatkowy algorytm opiera się na zmiennej globalnej przetrzymującej numer danej iteracji algorytmu.

### 5.3 Wyniki

40 iterations of normal algorithm (Flota32): 0.25860548

40 iterations of normal algorithm (Flota64): 0.011611238029748606

40 iterations of changed algorithm (Float32): 1.093568

### 5.4 Wnioski

Można łatwo zauważyć, że zarówno wynik w którym nastąpiło obcięcie, jak i zwiększenie precyzji mają znaczny wpływ na wartość funkcji. Przyczyną takiego zachowania jest fakt, że model logistyczny jest układem chaotycznym. Oznacza to, że niewielkie zmiany warunków poczatkowych mają duży wpływ na wynik końcowy. Zwiększenie precyzji jest rozwiązaniem doraźnym, pomaga w opóźnieniu wystąpienia większych wahań wyników, jednakże po obcięciu liczby przez arytmetykę błąd zacznie narastać.

## Zadanie 6

### 6.1 Opis zagadnienia

Zadanie polega na zbadaniu zachowania równania dla następujących danych:  
(c = -2, x0 = 1),  
(c = -2, x0 = 2),  
(c = -2, x0 = 1.99999999999999),  
(c = -1, x0 = 1),  
(c = -1, x0 = -1),  
(c = -1, x0 = 0.75),  
(c = -1, x0 = 0.25),

dla n = 40.

### 6.2 Rozwiązanie

Wykresy zostały uzyskane poprzez wykorzystanie biblioteki “Plots” w Julii.

### 6.3 Wyniki

### 6.4 Wnioski

Jak można zauważyć z wykresów arytmetyka Float powoduje niewielkie błędy w początkowych obliczeniach wartości wyrażenia, które odbijają się na wykresie jako niestabilność niektórych reprezentowanych danych.